

総合問題

1 ※問題文は、教科書 194 ページを参照。

指針 逆関数ともとの関数の関係

- (2) 直線 $y=x$ に垂直な直線は、直線 $y=x$ に関して対称である。
 (3) $\implies$ と $\impliedby$ のそれぞれについて反例がないか調べる。反例が考えられないとき、(*) は正しいと予想できる。

解答 (1) $\frac{x-2}{x-1} = -\frac{1}{x-1} + 1$ であるから、関数 $y = \frac{x-2}{x-1}$ の値域は $y \neq 1$ である。

$$y(x-1) = x-2 \text{ より } (y-1)x = y-2$$

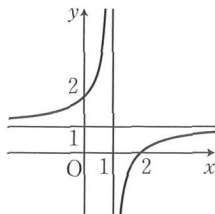
ここで、 $y \neq 1$ であるから

$$x = \frac{y-2}{y-1}$$

よって、求める逆関数は

$$y = \frac{x-2}{x-1} \quad \text{答}$$

また、 $y = \frac{x-2}{x-1}$ のグラフは右の図のようになる。



- (2) 直線 $y=x$ に垂直な直線は、直線 $y=x$ に関して対称である。
 よって、たとえば、1 次関数を $y=-x$ とすると、関数 $y=-x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である。また、関数 $y=-x$ の逆関数は

$$y = -x \quad \text{答}$$

- (3) 正しい。 答

($\implies$) 関数 $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ が一致するとする。

点 (a, b) を関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点であるとする

$$b = f(a)$$

このとき、関数 $y=f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$a = f^{-1}(b)$$

ここで、関数 $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ が一致することから

$$f^{-1}(b) = f(b) \quad \text{ゆえに } a = f(b)$$

よって、点 (a, b) が関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点であるとき、点 (b, a) も関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点である。

点 (a, b) と点 (b, a) は直線 $y=x$ に関して対称であるから、関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である。

($\impliedby$) 関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称であるとする。

このとき、点 (a, b) が関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点であるとする、

点 (b, a) も関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点である。

よって、 $b=f(a)$ ならば $a=f(b)$ が成り立つ。

ここで、関数 $f(x)$ の定義域の任意の値 a に対して、 $b=f(a)$ を満たす b が値域に存在する。

このとき、 $a=f(b)$ が成り立つことから、 a は値域の値でもある。

また、関数 $f(x)$ の値域の任意の値 b に対して、 $b=f(a)$ を満たす a が定義域に存在する。

このとき、 $a=f(b)$ が成り立つことから、 b は定義域の値でもある。

よって、関数 $y=f(x)$ の定義域と値域は値の範囲として一致する。

したがって、関数 $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ の定義域は一致する。

また、定義域の任意の値 a について

$$b=f(a), a=f(b)$$

$a=f(b)$ より、関数 $y=f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$b=f^{-1}(a)$$

$b=f(a)$ 、 $b=f^{-1}(a)$ から、定義域の任意の値 a について

$$f(a)=f^{-1}(a)$$

以上より、関数 $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ の定義域が一致し、その定義域のすべての値 a に対して

$$f(a)=f^{-1}(a)$$

が成り立つから関数 $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ は一致する。

以上より、(*) は成り立つ。 終

2 ※問題文は、教科書 195 ページを参照。

指針 分数関数の極限 分母が 0 に近づく場合、正の値をとりながら 0 に近づくのか、負の値をとりながら 0 に近づくのかに注意する。

解答 方針 B の解答が誤りである。 罫

(理由) $x > 1$ において、 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$ より $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ である。

よって、 $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \rightarrow -0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = -\infty \quad \text{罫}$$

3 ※問題文は、教科書 196 ページを参照。

指針 e^e に最も近い整数

- (1) 平均値の定理を利用する。
- (2) y 座標が $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ となる点が Q である。
- (3) 近似値から、 $2.708 < 2.718 < 2.773$
すなわち、 $\log 15 < e < \log 16$
- (4) 区間 $[15, 16]$ で不等式 ① を用いる。

解答 (1) (i) $a < c < b$ であり、 $f(x)$ は定義域内のすべての x で第 2 次導関数をもつので、区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能であるから、平均値の定理により

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(x_1), \quad a < x_1 < c$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(x_2), \quad c < x_2 < b$$

をそれぞれ満たす実数 x_1, x_2 が存在する。

ここで、区間 $[a, b]$ で $f''(x) < 0$ であるから、 $f'(x)$ は区間 $[a, b]$ で減少する。

$$x_1 < x_2 \text{ であるから } f'(x_1) > f'(x_2)$$

$$\text{したがって } \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \quad \text{㊦}$$

$$(ii) \quad c-a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$b-c = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

よって、(i)より

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{b-a}{2}} > \frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}}$$

$$\frac{b-a}{2} > 0 \text{ であるから}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a) > f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\text{したがって } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \dots\dots \text{①} \quad \text{㊦}$$

- (2) 点 P は直線 $x = \frac{a+b}{2}$ 上の点であり、点 Q も直線 $x = \frac{a+b}{2}$ 上の点である

から、その座標は

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

したがって、 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ とすると、点 Q は、線分 AB の中点である。 答

- (3) 与えられた近似値から

$$\log 15 < e < \log 16$$

よって、 $\log 15 < \log e^e < \log 16$ より

$$15 < e^e < 16$$

したがって、 e^e の整数部分は 15 答

- (4) $f(x) = \log x$ について

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

したがって、常に $f''(x) < 0$ である。

区間 $[15, 16]$ でも $f''(x) < 0$ であるから、① より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{15+16}{2}\right) &> \frac{f(15)+f(16)}{2} \\ &= \frac{2.708+2.773}{2} = 2.7405 \end{aligned}$$

$$\frac{15+16}{2} = 15.5 \text{ より, } \log 15.5 > 2.7405 \text{ であるから}$$

$$\log 15 < e < \log 15.5$$

よって、 $15 < e^e < 15.5$ より、 e^e に最も近い整数は 15 答

4 ※問題文は、教科書 197 ページを参照。

指針 定積分とはさみうちの原理を利用した無限級数の和

- (1) (iv) $0 \leq x \leq 1$ において、 $y = \frac{1}{1+x}$ は減少関数であることに着目して不等式をつくる。

- (2) (1) の (ii) と同様に考えると、(C) を用いればよいことがわかる。

解答 (1) (i) S_n は初項 1, 公比 $-x$, 項数 n の等比数列の和である。

$x \geq 0$ より、 $-x \leq 1$ であるから

$$S_n = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} \quad \text{すなわち} \quad S_n = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x} \quad \text{答}$$

$$(ii) \quad T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

また

$$\begin{aligned} &\int_0^1 S_n dx \\ &= \int_0^1 \{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1}\} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

したがって $T_n = \int_0^1 S_n dx$ 図

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2$ 答

(iv) $y = \frac{1}{1+x}$ は $0 \leq x \leq 1$ において、減少関数であるから

$$\frac{1}{1+1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+0}$$

すなわち $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$

$0 \leq x \leq 1$ において、 $x^n \geq 0$ であるから

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

よって $\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

ここで $\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

であるから

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{図}$$

(v) (iv) より $\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right\} \\ &= \log 2 + 0 = \log 2 \end{aligned}$$

したがって $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$ 答

(2) (C) は初項 1, 公比 $-x^2$, 項数 n の等比数列の和である。

$x \geq 0$ とすると、 $-x^2 \neq 1$ であるから、その和を U_n とおくと

$$U_n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}$$

$$= \frac{1 - (-x^2)^n}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \quad \dots\dots ③$$

無限級数 ② の部分和を V_n とおけば

$$\begin{aligned} \int_0^1 U_n dx &= \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots\dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}\} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \dots\dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \\ &= V_n \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

$$③, ④ \text{ より } V_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \quad \dots\dots ⑤$$

ここで、定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ について、 $x = \tan \theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x と θ の対応は右のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

総合問題

また、 $y = \frac{1}{1+x^2}$ は $0 \leq x \leq 1$ において、減少関数であるから

$$\frac{1}{1+1^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+0^2}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$0 \leq x \leq 1$ において、 $x^{2n} \geq 0$ であるから

$$\frac{x^{2n}}{2} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$$

$$\text{よって } \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$\text{ここで } \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2} dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)} \right]_0^1 = \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\int_0^1 x^{2n} dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

であるから

$$\frac{1}{2(2n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = 0$$

したがって, ⑤ より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

すなわち $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ 